La funzione di trasferimento di una rete elettrica è $\frac{V_o}{V_s} = \frac{2s}{s^2+4s+5}$. Determinare la risposta a regime all'ingresso V_s = 4 sin(t)

La risposta in frequenza è la funzione di trasferimento in regime sinusoidale s → $j\omega$

$$\frac{\overline{V_o}(j\omega)}{\overline{V_s}(j\omega)} = \bar{F}(j\omega) = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2+4j\omega+5} = \frac{j2\omega}{5-\omega^2+4j\omega} \qquad \overline{V_o}(j\omega) = \bar{F}(j\omega)\cdot\overline{V_s}(j\omega)$$

$$\overline{V_o}(j\omega) = \bar{F}(j\omega)\cdot\overline{V_s}(j\omega) \qquad \rightarrow \qquad \overline{V_o}(j\omega) = \frac{j2\omega}{5-\omega^2+j4\omega}\cdot\overline{V_s}(j\omega)$$

V_s = 4 sin(t) = 4 cos(t - π/2) → ω = 1

Per ω = 1 $\bar{F}(j) = \frac{j2}{5-1+j4} = \frac{j2}{4+j4} = \frac{j2}{4(1+j)}\cdot\frac{1-j}{1-j} = \frac{(1+j)}{4}$

Il fasore corrispondente alla sinusoide V_s si determina con la trasformata di Steinmetz (riferita alla funzione coseno e al valore massimo).

$$\overline{V_s}(j) = \mathfrak{S}\{V_s(t)\} = \mathfrak{S}\{4\cos(t - \pi/2)\} = 4\angle -\pi/2 = 4\, e^{-j\pi/2} = -j4\ V$$

Per ω = 1

$$\overline{V_o}(j) = \bar{F}(j)\cdot\overline{V_s}(j) = \frac{(1+j)}{4}(-j4) = 1 - j = \sqrt{2}\angle -\pi/4 = \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}\ V$$

Per determinare $v_o(t)$ si applica l'antitrasformata di Steinmetz

$$v_o(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{\overline{V_o}(j)\} = R_e\{\overline{V_o}(j)\cdot e^{jt}\} =$$

$$= R_e\{(1-j)\cdot e^{jt}\} = R_e\{(1-j)\cdot[\cos(t) + j\sin(t)]\} =$$

$$= R_e\{\cos(t) - j\cos(t) + j\sin(t) + \sin(t)\} =$$

$$= \cos(t) + \sin(t)\ V$$

oppure

$$= R_e\{\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}\cdot e^{jt}\} = R_e\{\sqrt{2}\, e^{j(t-\pi/4)}\} =$$

$$= R_e\{\sqrt{2}[\cos(t-\pi/4) + j\sin(t-\pi/4)]\} =$$

$$= \sqrt{2}\cos(t-\pi/4)\ V$$

Oppure, applicando il teorema della risposta in frequenza, la risposta a regime ad una sinusoide $v_s(t)$ = A cos($\bar{\omega}$t + φ) è ancora una sinusoide del tipo $v_o(t)$ = B cos($\bar{\omega}$t + ψ) con

$$B = A|\bar{F}(j\bar{\omega})| \quad e \quad \psi = \varphi + \varphi_F(j\bar{\omega})$$

Con $\bar{\omega}$ = 1

$$\bar{F}(j) = \frac{(1+j)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\pi/4} \qquad B = A|\bar{F}(j)| = 4\frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2} \quad e \quad \psi = \varphi + \varphi_F(j) = -\pi/2 + \pi/4 = -\pi/4$$

Quindi

$$v_o(t) = \sqrt{2}\cos(t-\pi/4)\ V$$